**Métodos Numéricos**
22 de junio de 2020
**Segundo Parcial**

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ☐ Completar apellido en las hojas y numerarlas<br>☐ Enviar fotos claras y legibles de la resolución del examen<br>☐ **Justificar todas las respuestas** | Nombre y Apellido<br>*Yulita Federico* | | | |
| | Ej. 1<br>15 | Ej. 2<br>30 | Ej. 3<br>35 | Nota<br>80 (Aprobado) |

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$ y sea $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de $A$ con $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonales y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonal conteniendo los valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. Llamemos además $u_1, \ldots, u_m$ a las columnas de $U$ y $v_1, \ldots, v_n$ a las columnas de $V$. Se desea encontrar un $x \in \mathbb{R}^n$ ($||x||_2 = 1$) que minimiza $||Ax||_2$.

    (a) Mostrar que un cambio de variables permite reescribir el problema como: "encontrar un $y \in \mathbb{R}^n$ ($||y||_2 = 1$) que minimiza $||\Sigma y||_2$". (10 puntos)

    (b) Probar que un $y^\star$ que resuelve el problema del ítem (a) es $y^\star = e_n$, el $n$-ésimo vector de la base canónica, es decir: $\min\limits_{y:||y||_2=1} ||\Sigma y||_2 = ||\Sigma e_n||_2$. (15 puntos)

    (c) Dar una expresión de $x^\star \in \mathbb{R}^n$ (es decir, de una solución del problema inicial) y de $||Ax^\star||_2$ en función de los componentes de la descomposición SVD de $A$. (10 puntos)

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$ con $c \in \mathbb{R}$ y sea $b \in \mathbb{R}^3$.

    (a) Plantear el esquema iterativo de Gauss-Seidel para resolver el sistema $Ax = b$. (10 puntos)

    (b) Hallar $\rho(T_{GS})$, siendo $T_{GS}$ la matriz de iteración de Gauss-Seidel. (8 puntos)

    (c) ¿Para qué valores de $c$ converge? (12 puntos)

3. Sea $b \in \mathbb{R}^m$ y $S = \langle q_1, \ldots, q_n \rangle$ el subespacio generado por el conjunto ortonormal de vectores $q_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, n$, $m \geq n$.

    (a) Plantear y resolver el problema de cuadrados mínimos que encuentra el elemento en $S$ que se encuentra más cercano a $b$. (13 puntos)

    (b) Probar usando cuadrados mínimos que si $b \in S^\perp$ entonces 0 es el elemento en $S$ más cercano a $b$. (12 puntos)

    (c) Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando en cada caso: 'Si se agrega como elemento generador de $S$ al vector $q_{n+1} = \sum_i^n q_i$, entonces existe un $b$ para el cual el problema de cuadrados mínimos planteado en (a) tiene solución única.' (10 puntos)

FEDERICO YULITA 351/17

HOJA Nº 1

FECHA

1) Ⓐ Notemos:

$Ax = U\Sigma V^t x$ , tomemos $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ una combinación lineal de las columnas de $V$ ya que son base de $\mathbb{R}^n$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U\Sigma V^t v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2, \dots, \sigma_n u_n) \begin{pmatrix} v_1^t v_i \\ v_2^t v_i \\ \vdots \\ v_n^t v_i \end{pmatrix} ✓$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \sigma_j v_j^t v_i u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \delta_{ij} u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma_i u_i ✓$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ ?

$\delta_{ij}$

$y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$$\therefore \|Ax\|_2 = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma_i u_i\|_2 \leq \|\Sigma y\|_2 \underbrace{\|u\|_2}_{=1} = \|\Sigma y\|_2$$

no es una reescritura si está acotado por $\leq$

Ⓑ

Si los x son de norma igual a 1, por qué los y también?

Ya que $\sigma_i \leq \sigma_{i-1}$ $\forall i \geq 2$ entonces sabemos que $\sigma_n$ es el valor ~~principal~~ singular más chico. Entonces, como $\|x\|_2 = 1$ tomemos $\alpha_i = \delta_{in}$ que es lo mismo que $y = e_n$:

$$\|Ax\|_2 = \|\Sigma y\|_2 = \|\Sigma e_n\|_2 = |\sigma_n| .$$

No demuestra que esa elección de y minimiza.

Ⓒ Por nuestra elección de $y$ sabemos que $x = Vy$. Entonces, usando $x^* = Vy^*$ y $y^* = e_n$ tenemos que:

$$x^* = Vy^* = Ve_n = v_n$$

FEDERICO YULITA 351/17

HOJA Nº 1

FECHA

2) A Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} = D - L - U$$

Entonces:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la sucesión de Gauss-Siedel es
$x^{(k+1)} = \underbrace{(D-L)^{-1}U}_{=T} x^{(k)} + \underbrace{(D-L)^{-1}b}_{=c}$. Calculemos $T$:

$$D - L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad T = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

B Calculemos los autovalores de $T$:

$$\cancel{\chi(\lambda) = (-1)^{1+1}\lambda(-\lambda c^2) = -\lambda c^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0}$$

$$\chi(\lambda) = (-1)^{1+1}(-\lambda)(-\lambda(c^2-\lambda)) = -\lambda^2(\lambda - c^2) = 0$$

$\therefore \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = c^2 \end{cases}$ Por lo tanto, $\rho(T) = c^2$

C Sabemos que para que la sucesión converja a la solución entonces la matriz debe ser convergente. Entonces, $\rho(T) < 1$.
Por lo tanto, ya que $\rho(T) = c^2$ entonces $-1 < c < 1$.

NOTA

FEDERICO YULITA 351/17

HOJA Nº 1

FECHA

3) (A) Queremos hallar el vector $y \in \mathbb{R}^m$ más cercano a $b$, es decir, que minimiza $\|y-b\|_2$, llamémoslo $y^*$. Ya que los vectores $q_i \in \mathbb{R}^m$ que generan el espacio $S$ forman una base (ya que son ortonormales) entonces podemos expresar a $y$ como una combinación lineal:

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i \quad , \quad x_i \in \mathbb{R} . \quad \text{Tomemos } A = (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ y } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ó $y = Ax$. Entonces; la solución $y^*$ cumple que:

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}} \|Ax - b\| \quad , \text{ donde } y^* = Ax^*$$

El problema se transforma en el problema de cuadrados mínimos lineales del sistema $Ax = b$. Entonces, usando las ecuaciones normales sabemos que $A^t A x^* = A^t b$. Ya que las columnas de $A$ son ortonormales entonces $A$ es ortogonal, por lo que $A^t A = I$. Entonces, $x^* = A^t b$.

(B) Si $b \in S^\perp$ e $y \in S$ entonces por pitágoras sabemos que:

$$\|y-b\|_2^2 = \|y\|_2^2 + \|b\|_2^2 \geq \|b\|_2^2 \quad (\text{ya que } y \perp b)$$

Entonces, ya que $\|y-b\|_2 \geq \|b\|_2$ para minimizar esta norma es necesario que $y = 0$, ya que es el único vector que cumple que su norma es nula. Entonces, $y^* = 0$.

(C) Sabemos que existe solución única si y sólo si $Nu\{A\} = \{0\}$. Si a $A$ le agregamos la columna $q_{n+1}$ como es una combinación lineal de las otras columnas entonces estas son linealmente dependientes y $Nu(A) \neq \{0\}$. Entonces, la solución no es única. FALSO.

NOTA